

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Рабочая тетрадь

по курсу

“Дифференциальные уравнения”

Практикум по математике

для студентов бакалавриата очной формы обучения

студента *второго* курса _____ группы

Ф.И.О.

Рязань

2020

Рецензент: Мамонов С.С., доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры математики и методики
преподавания математических дисциплин
Рязанского государственного университета
им. С.А. Есенина

О.В. Тихонова, Ю.А. Арабчикова. Рабочая тетрадь по курсу “Дифференциальные уравнения”. Практикум по математике для студентов бакалавриата очной формы обучения; Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета. – Рязань, 2020. – 76 с.

Рабочая тетрадь предназначена для студентов бакалавриата дневного отделения 2 курса всех направлений подготовки. Данное пособие содержит материал для проведения практических занятий и для организации самостоятельной работы студентов.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

© Рязанский институт (филиал)
Московского политехнического университета,
2020

© О.В. Тихонова, Ю.А. Арабчикова
2020

Дифференциальные уравнения первого порядка

Занятие 1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Вопросы для подготовки к занятию.

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
 2. Дайте определения общего и частного решений дифференциального уравнения.
 3. Как определить порядок дифференциального уравнения?
 4. Решить задачу Коши – это _____
-
5. Как находится общий интеграл для уравнения с разделенными переменными?
 6. Запишите общий вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: _____
 7. Как интегрируются такие уравнения? Какие функции могут оказаться особыми решениями?

1.1. Показать, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения.

а) $y = (x + C) \cdot e^x$, $y' - y = e^x$;

б) $x^2 - xy + y^2 = C$, $(x - 2y)y' - 2x + y = 0$.

в) $y = \frac{\sin x}{x}, \quad xy' + y = \cos x.$

1.2. Найдите решения дифференциальных уравнений, используя представление производной в виде отношения дифференциалов $y' = \frac{dy}{dx}$:

1) $2y' = 3yx;$

2) $yy' + x = 0;$

3) $xy' - y = 0;$

4) $(x^2 + x)y' = 3y - 1;$

5) $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x.$

1.3. Решите дифференциальное уравнение $y'(1 + y) = xy \cdot \sin x$.

Решение:

1.4. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$$

Решение:

1.5. Найдите частные решения уравнений:

а) $(1+x^2)dy - 2xydx = 0$, $y(1) = 2$

Решение:

1. Находим общее решение дифференциального уравнения:

2. Находим частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию:

б) $y' \cdot \sin x - y \cdot \ln y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Решение:

в) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0, y(1) = 0$

Решение:

1.6. * Найдите общее решение уравнения $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

Решение:

1.7. Найдите общее решение уравнения $(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0$.

Решение:

Занятие 2. Однородные дифференциальные уравнения

Вопросы для подготовки к занятию.

1. Дайте определение однородной функции. Приведите пример одной из них: _____

2. Какое уравнение называется однородным?

3. Запишите однородное дифференциальное уравнение в общем виде:

4. Какой подстановкой однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными?

5. В каком случае и с помощью какой подстановки дифференциальное уравнение первого порядка можно свести к однородному? _____

2.1. Проинтегрируйте уравнение $y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y) =$

Найдем $f(\lambda x, \lambda y) =$

Получили, что функция $f(x, y)$ является _____,

а данное уравнение является _____

Используем замену _____, тогда $y' =$ _____

Уравнение примет вид:

2.2. Найдите частное решение уравнения $(2x^2 + xy)dy = (xy + y^2)dx$, $y(1) = 1$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $y' = f(x, y)$ и убедимся, что оно является однородным:

2.3. Найти общий интеграл уравнения $xy' - y = \frac{x}{\arctg\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $y' = f(x, y)$ и убедимся, что оно является однородным:

Введем замену _____, тогда $y' =$ _____

Уравнение примет вид:

2.4. Проинтегрируйте уравнения:

а) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

Решение. Преобразуем уравнение к виду $y' = f(x, y)$ и убедимся, что оно является однородным:

Используем подстановку _____, тогда _____

б) $y(x^2 + y^2)dx - x^3 dy = 0$.

Решение.

2.5. Решите уравнения, сведя их к однородным:

а) $(y + 2)dx - (2x + y + 6)dy = 0;$

Решение. Преобразуем уравнение

$$y' =$$

Так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$, то используем подстановку

$$x = \underline{\hspace{2cm}}, \quad y = \underline{\hspace{2cm}}$$

Находим точку пересечения прямых:

$$\begin{cases} \end{cases}$$

Производим в исходном уравнении замену переменных, полагая

$$x = \underline{\hspace{2cm}}, \quad y = \underline{\hspace{2cm}}, \quad dx = \underline{\hspace{2cm}}, \quad dy = \underline{\hspace{2cm}}$$

Уравнение преобразуется к виду:

$$\text{б) } y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y};$$

Решение.

Так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$, то используем подстановку

тогда

$$\text{в) } (x-2y+3)dy + (2x+y-1)dx = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение

$$y' =$$

Так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$, то используем подстановку

$$x = \underline{\hspace{2cm}}, \quad y = \underline{\hspace{2cm}}$$

Находим точку пересечения прямых:

$$\left\{ \right.$$

Производим в исходном уравнении замену переменных, полагая

$$x = \underline{\hspace{2cm}}, \quad y = \underline{\hspace{2cm}}, \quad dx = \underline{\hspace{2cm}}, \quad dy = \underline{\hspace{2cm}}$$

Уравнение преобразуется к виду:

2.6.* Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

Решение:

Занятие 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнения Бернулли

Вопросы для подготовки к занятию.

1. Запишите общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка: _____
2. Чем отличается неоднородное линейное уравнение от однородного?
3. В чем заключается метод Бернулли решения ЛНДУ? Какая подстановка используется? _____
4. В каком виде ищется общее решение уравнения при использовании метода вариации произвольной постоянной (метода Лагранжа)? _____
5. Как называется уравнение вида $y' + p(x)y = g(x)y^n$? Как найти его общий интеграл? _____

3.1. Найдите общее решение линейного уравнения $xy' - y = x^3$ и укажите частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=1,5$.

Решение. Будем искать общее решение уравнения в виде $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – некоторые функции от x (метод Бернулли), тогда $y' =$

Подставив u и y' в данное уравнение, получаем:

Преобразуем уравнение, вынеся, например, функцию u за скобки:

Подберем функцию $v = v(x)$ таким образом, чтобы выражение, стоящее в скобках было равно нулю, т.е. решим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

Теперь находим функцию $u = u(x)$:

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

Решаем задачу Коши. Для этого подставляем значения $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}$ в общее решение и находим соответствующее значение C :

Искомое частное решение

3.2. Решите уравнение $y' - \frac{y}{x} = x \cdot \cos x$.

Решение. Решим это линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа).

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения.

2. Общее решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде _____, где $C(x)$ - неизвестная функция.

Находим $y' =$

Подставляя y и y' в данное уравнение, получим

Таким образом, получаем общее решение данного уравнения:

3.3. Решите дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x + y^2}$.

Решение.

3.4. Решите уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ двумя способами.

Решение.

1 способ. Метод Бернулли:

2 способ. Метод Лагранжа:

3.5. Найдите общее решение уравнения $(2xy + 3)dy - y^2 dx = 0$.

Решение.

3.6. Решите уравнения

а) $y' + \frac{y}{x} = 2x^4 y^4$;

Решение. Это уравнение Бернулли.

Разделим обе части уравнения на _____

Введем замену _____

б) $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}.$

Решение. Это уравнение Бернулли.

Разделим обе части уравнения на _____

Введем замену _____

3.7. Найдите общее решение уравнения $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$

Решение.

3.8.* Найдите уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси абсцисс, равен квадрату ординаты точки касания.

Занятие 4. Уравнения в полных дифференциалах

Вопросы для подготовки к занятию.

1. При каком условии дифференциальное уравнение

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах?

2. Как интегрируется уравнение в полных дифференциалах?

3. В чем состоит метод интегрирующего множителя? _____

4.1. Решите уравнение $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$.

Решение. Определим тип данного уравнения.

$P(x, y) =$ _____; $Q(x, y) =$ _____

Находим $\frac{\partial P}{\partial y} =$

$\frac{\partial Q}{\partial x} =$

Поскольку _____, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, значит, общий интеграл уравнения можно получить в виде $u(x, y) = C$. Находим функцию $u(x, y)$ из равенств

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) =$ _____, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) =$ _____.

Интегрируем первое уравнение по x , считая при этом y постоянной величиной, получаем: $u(x, y) =$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial y} =$

С другой стороны, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

Таким образом, получаем уравнение для определения $C'(y)$:

Функция $u(x, y)$ имеет вид $u(x, y) =$

Записываем общий интеграл уравнения:

4.2. Решите уравнение $(x + \sin y)dx + (x \cdot \cos y + \sin y)dy = 0$.

Решение.

$P(x, y) =$ _____; $Q(x, y) =$ _____

Находим $\frac{\partial P}{\partial y} =$ _____ и $\frac{\partial Q}{\partial x} =$ _____

Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, так как _____, следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Находим функцию $u(x, y)$, используя равенства:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x (считаем y постоянным):

Продифференцируем полученное равенство по y и приравняем ко второму уравнению:

Общий интеграл имеет вид

4.3. Решите уравнения:

a) $\frac{y}{x}dx + (3y^2 + \ln x)dy = 0$;

Решение. В данном случае

$$P(x,y)=\underline{\hspace{2cm}}; \quad Q(x,y)=\underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

Следовательно, данное уравнение является _____
_____ и имеет вид $du(x,y)=0$.

Находим функцию $u(x,y)$:

$$\mathcal{U} =$$

6) $[\sin y + (1 - y)\cos x]dx + [(1 + x)\cos y - \sin x]dy = 0.$

Решение. Здесь

$P(x, y) =$ _____; $Q(x, y) =$ _____

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Находим функцию $u(x, y)$:

$$u =$$

4.4. Найдите общий интеграл уравнения $y \cdot e^x dx + (y + e^x) dy = 0$.

Решение.

4.5. Найдите интегрирующий множитель и решите уравнение
 $ydx - (x + y^2)dy = 0$.

Решение. Здесь

$$P(x, y) = \underline{\hspace{10em}} \quad Q(x, y) = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \quad \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

Значит, уравнение $\underline{\hspace{10em}}$ уравнением в полных дифференциалах.

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} =$$

не зависит от $\underline{\hspace{1em}}$, то данное уравнение имеет интегрирующий множитель

$$\mu(y) =$$

Домножим обе части уравнения на $\underline{\hspace{1em}}$:

Убедимся, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и решим его:

4.6. Найдите интегрирующий множитель и решите уравнение

$$(x^2 \cdot \cos x - y)dx + xdy = 0.$$

Решение. Здесь

$$P(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad Q(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

Значит, уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Так как выражение

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} =$$

не зависит от ____, то данное уравнение имеет интегрирующий множитель

$$\mu(x) =$$

Домножим обе части уравнения на ____:

Убедимся, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и решим его:

4.7. Определите тип дифференциальных уравнений, приведенных ниже.

Укажите метод решения этих уравнений.

1) $yy' = 2y - x;$

2) $y' + xy = xy^3;$

3) $y' + y\cos x = \sin 2x;$

4) $y' + y = 5;$

5) $y' - x = \frac{3y}{x};$

6) $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0;$

7) $x^2 y' = y^2 + xy;$

8) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0.$

Дифференциальные уравнения высших порядков

Занятие 5. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Вопросы для подготовки к занятию.

1. Дайте определение дифференциального уравнения второго порядка

2. Что называется задачей Коши? решением уравнения? общим решением уравнения? частным решением уравнения?

3. В каких частных случаях удастся понизить порядок дифференциального уравнения высшего порядка? _____

4. Запишите общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка: _____

5. Какова структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения? _____

5.1. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение $y''' = x + \cos 3x$.

Решение. Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y'' = \int (x + \cos 3x) dx =$$

$$y' =$$

$$y =$$

5.2. Найдите общее решение уравнения $y'' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin x$.

Решение. Интегрируем данное уравнение:

$$y' = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + x - \sin x \right) dx =$$

$$y =$$

5.3. Найдите частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

а) $y^{iv} = \cos^2 x$, $y(0) = \frac{1}{32}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{8}$, $y'''(0) = 0$;

Решение. Интегрируем данное уравнение:

$$y''' =$$

Используя начальное условие $y'''(0) = 0$, находим постоянную интегрирования C_1 :

Находим $y'' =$

По условию $y''(0) = \frac{1}{8}$, составим уравнение для определения константы C_2 :

Вычисляем $y' =$

Из условия $y'(0)=0$ находим C_3 :

Интегрируя, получим $y =$

Используя условие $y(0)=\frac{1}{32}$, находим константу C_4 :

Искомое частное решение

б) $y'' = e^{2x} + \cos x - 2x^3$, $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 1$;

Решение. Интегрируя данное уравнение два раза, получим: общее решение

$$y' =$$

$$y =$$

Используя начальные условия, составим систему уравнений относительно неизвестных констант C_1 и C_2 :

Подставляя найденные значения в общее решение, получим искомое частное решение

в) $y''' = x \cdot \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

Решение.

5.4. Решите уравнения:

а) $(1 - x^2)y'' - xy' = 2;$

Решение. Данное уравнение явно не содержит искомую функцию y .

Вводим замену $y' = p(x) = p$, тогда $y'' = \underline{\hspace{2cm}}$

После подстановки уравнение примет вид

б) $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$;

Решение. Данное уравнение явно не содержит функцию y . Для понижения порядка уравнения введем замену: $y'' = \underline{\hspace{2cm}}$, тогда $y''' = \underline{\hspace{2cm}}$

Получим уравнение первого порядка

в) $y'''(x-1) - y'' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$, $y''(2) = 1$.

Решение. Уравнение явно не содержит функцию y .

Вводим замену _____

После подстановки уравнение примет вид

5.5. Найдите общее решение уравнений:

а) $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$;

Решение. Уравнение явно не содержит независимую переменную x . Вводим замену $y' =$ _____, тогда $y'' =$ _____

Уравнение примет вид

Интегрируем получившееся уравнение:

б) $y''(1+y) = (y')^2 + y'$;

Решение. Уравнение явно не содержит независимую переменную x . Вводим замену $y' =$ _____, тогда $y'' =$ _____

Исходное уравнение преобразуется к виду:

5.6. Найдите частное решение уравнений:

а) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1), y(2)=1, y'(2)=-1;$

Решение. Уравнение явно не содержит _____

Вводим замену _____

После подстановки уравнение примет вид

б) $yy'' - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Уравнение явно не содержит _____

Вводим замену _____

После подстановки уравнение примет вид

Занятие 6. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Запишите общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка: _____.

Чем оно отличается от линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?

2. Запишите ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и соответствующее ему характеристическое уравнение:

3. Общее решение ЛОДУ находится по одной из формул (k_1 и k_2 - корни характеристического уравнения для данного ЛОДУ):

1) _____

2) _____

3) _____

6.1. Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'' + y' - 2y = 0$;

Решение. Составим характеристическое уравнение

Общее решение однородного уравнения:

б) $y'' - 2y' + y = 0$;

Решение.

в) $y'' - 2y' + 2y = 0;$

Решение.

г) $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0;$

Решение.

д) $y''' + y = 0;$

Решение.

е) $y^{(6)} - 2y^{(4)} - y'' + 2y = 0;$

Решение.

6.2. Решите уравнения:

а) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

Решение.

б) $y'' + 4y = 0$;

Решение.

в) $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$;

Решение.

г) $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Решение.

6.3. Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$;

Решение. Составим характеристическое уравнение:

Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

б) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

Решение.

в) $y''' = -y'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$;

Решение.

**Занятия 7-8. Линейные неоднородные дифференциальные
уравнения с постоянными коэффициентами**

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Запишите общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка: _____
Чем оно отличается от линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?
2. Какова структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения? _____
3. Повторите метод подбора частного решения \tilde{y} для линейного неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью.

7.1. Найдите общее решение уравнений:

а) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3;$

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Находим общее решение ЛОДУ

$\bar{y} =$

3. Находим частное решение ЛНДУ

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ является частным случаем функции

$f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$ при $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $P_n(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{1cm}}$.

$a = \underline{\hspace{1cm}}$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, частное решение будем искать в виде

$$\tilde{y} =$$

Для определения коэффициентов $\underline{\hspace{2cm}}$ находим

$$\tilde{y}' =$$

$$\tilde{y}'' =$$

Подставим выражения для \tilde{y} , \tilde{y}' , \tilde{y}'' в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x :

Тогда $\tilde{y} =$

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

б) $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$;

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Находим общее решение ЛОДУ

$$\bar{y} =$$

3. Находим частное решение ЛНДУ

Правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$, где

$$a = _, \quad P_n(x) = _, \quad n = _.$$

$a = _$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, частное решение будем искать в виде

$$\tilde{y} =$$

Находим производные

$$\tilde{y}' =$$

$$\tilde{y}'' =$$

Подставим выражения для \tilde{y} , \tilde{y}' , \tilde{y}'' в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x :

Тогда $\tilde{y} =$

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

в) $y'' + 6y' + 9y = (x - 2)e^{-3x}$.

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Находим общее решение ЛОДУ

$$\bar{y} =$$

3. Находим частное решение ЛНДУ

$f(x) =$ _____ является частным случаем функции

$$f(x) = \text{_____} \text{ при } a = \text{___}, P_n(x) = \text{_____}, n = \text{___}.$$

$a = \text{___}$ не является корнем характеристического уравнения кратности ___,
следовательно, частное решение будем искать в виде

$$\tilde{y} =$$

Находим производные

$$\tilde{y}' =$$

$$\tilde{y}'' =$$

Подставим выражения для \tilde{y} , \tilde{y}' , \tilde{y}'' в исходное уравнение:

Тогда $\tilde{y} =$

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

7.2. Решите уравнения:

а) $y'' + 3y' + 2y = (2x + 3)\sin x + \cos x$;

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Находим общее решение ЛОДУ

$$\bar{y} =$$

3. Находим частное решение ЛНДУ

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ является частным случаем функции

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x) \quad \text{при} \quad \alpha = _, \quad \beta = _, \quad P_n(x) = _,$$

$$n = _, \quad R_m(x) = _, \quad m = _.$$

$\alpha + \beta i = _ \quad \text{не является корнем характеристического уравнения, следовательно, частное решение будем искать в виде}$

$$\tilde{y} =$$

Находим производные

$$\tilde{y}' =$$

$$\tilde{y}'' =$$

Подставим \tilde{y} , \tilde{y}' , \tilde{y}'' в исходное уравнение:

Тогда $\tilde{y} =$

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

б) $y'' + y = 2x \cos x + \sin x$;

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Находим общее решение ЛОДУ

$$\bar{y} =$$

3. Находим частное решение ЛНДУ

$f(x) =$ _____ является частным случаем функции

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x) \quad \text{при} \quad \alpha = _, \quad \beta = _, \quad P_n(x) = _,$$

$$n = _, \quad R_m(x) = _, \quad m = _.$$

$\alpha + \beta i = _$ не является корнем характеристического уравнения кратности $_$,
следовательно, частное решение будем искать в виде

$$\tilde{y} =$$

Находим производные

$$\tilde{y}' =$$

$$\tilde{y}'' =$$

Подставим \tilde{y} , \tilde{y}' , \tilde{y}'' в исходное уравнение:

Тогда $\tilde{y} =$

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

в) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Находим общее решение ЛОДУ

$$\bar{y} =$$

3. Находим частное решение ЛНДУ

$f(x) =$ _____ является частным случаем функции

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x) \quad \text{при} \quad \alpha = _, \quad \beta = _, \quad P_n(x) = _,$$
$$n = _, \quad R_m(x) = _, \quad m = _.$$

$\alpha + \beta i = \underline{\hspace{1cm}}$ не является корнем характеристического уравнения кратности $\underline{\hspace{1cm}}$,
следовательно, частное решение будем искать в виде

$$\tilde{y} =$$

Находим производные

$$\tilde{y}' =$$

$$\tilde{y}'' =$$

Подставим выражения для \tilde{y} , \tilde{y}' , \tilde{y}'' в исходное уравнение:

Тогда $\tilde{y} =$

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

7.3. Решите уравнения, используя метод вариации постоянных:

а) $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$;

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$\bar{y} =$, $y_1 =$, $y_2 =$

3. Частное решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y} =$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 = 0, \\ C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' = 0. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{y} =$

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

$$\text{б) } y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} =$$

3. Частное решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y} =$ _____, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – решения системы дифференциальных уравнений

Тогда $\tilde{y} =$

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

7.4. Решите уравнения, используя метод неопределенных коэффициентов:

а) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$;

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Находим общее решение ЛОДУ

$\bar{y} =$

3. Находим частное решение ЛНДУ

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

5. Находим константы C_1 и C_2 , используя начальные условия $y(0)=3$,
 $y'(0)=9$:

Искомое частное решение ЛНДУ

б) $y'' - 2y' + y = (x + 1)e^x$;

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Находим общее решение ЛОДУ

$$\bar{y} =$$

3. Находим частное решение ЛНДУ

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

в) $y'' + 25y = \cos 5x$.

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Находим общее решение ЛОДУ

$$\bar{y} =$$

3. Находим частное решение ЛНДУ

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

7.5. Решите уравнение, используя метод вариации произвольных постоянных $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x}$.

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

2. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} =$$

3. Частное решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y} =$ _____, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – решения системы дифференциальных уравнений

Тогда $\tilde{y} =$

4. Общее решение ЛНДУ имеет вид

Системы дифференциальных уравнений

Занятие 9-10. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Дайте определение системы дифференциальных уравнений и её решения.
2. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
3. В чем заключается метод интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений?

9.1. Решите систему $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y \end{cases}$ при данных начальных условиях

$$x(0)=1, y(0)=2.$$

Решение.

1. Из первого уравнения выражаем y и дифференцируем по t :

2. Подставим y и y' во второе уравнение:

3. Находим общее решение ЛОДУ второго порядка

4. Находим функцию y

5. Находим частное решение системы:

9.2. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 4x' - y' = \sin t - 3x, \\ x' = \cos t - y. \end{cases}$$

Решение.

1. Приведем систему к нормальному виду

2. Из первого уравнения выражаем y и дифференцируем по t :

3. Подставим y и y' во второе уравнение

4. Находим общее решение ЛОДУ

5. Находим общее решение ЛНДУ

6. Находим функцию y

7. Искомое общее решение имеет вид

9.3. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$

Решение.

9.4. Решите системы дифференциальных уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z. \end{cases}$$

Решение.

1. Дифференцируем первое равенство по t :

2. Вместо y' и z' подставим выражения из второго и третьего равенств:

3. Дифференцируем по t полученное равенство и подставляем y' и z' :

4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x' = \\ x'' = \\ x''' = \end{cases} \quad (*)$$

Из этой системы исключим неизвестные y и z . Используя первые два равенства, выразим y и z через функцию x и ее производные:

Подставим полученные выражения в третье уравнение системы (*) и найдем функцию x

5. Найдем функции y и z

6. Общее решение системы

$$\text{б) } \begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z. \end{cases}$$

Решение.

1. Дифференцируем первое равенство по t :

2. Вместо y' и z' подставим выражения из второго и третьего уравнений:

3. Решаем полученное ЛОДУ второго порядка:

4. Найденную функцию $x(t)$ подставим в первое уравнение системы, затем выразим z через y :

5. Подставим выражение для x и z во второе уравнение системы:

Решаем полученное линейное уравнение I порядка методом _____

6. Находим функцию z :

7. Общее решение системы

9.4. Решите систему $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}$ **при данных начальных усло-**

виях $x(0) = -\frac{3}{17}, y(0) = \frac{4}{17}.$

Решение.

1. Приведем систему к нормальному виду

2. Из первого уравнения выражаем y и дифференцируем по t :

3. Подставим y и y' во второе уравнение

4. Находим общее решение ЛОДУ

5. Находим общее решение ЛНДУ

6. Находим функцию y

7. Находим частное решение

9.5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$

Решение.

1. Сложим равенства

2. Вычитаем уравнения

9.6. Решите системы дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 9;$

Решение.

1. Из первого уравнения выражаем y и дифференцируем по t :

2. Подставим y и y' во второе уравнение:

3. Находим общее решение ЛОДУ второго порядка

4. Находим функцию y

5. Находим частное решение системы:

$$\text{б) } \begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = -x + y + z, \\ z' = x - z. \end{cases}$$

Решение.

1. Дифференцируем первое равенство по t и подставим выражения для y' и z' из второго и третьего уравнений:

2. Заметим, что $-2y - z = x' - x$, тогда получим ЛОДУ второго порядка относительно x :

3. Найденную функцию $x(t)$ подставим в третье уравнение системы:

Решаем полученное линейное уравнение I порядка методом _____

4. Из первого уравнения находим u :

5. Общее решение системы имеет вид